Билет № 1.

Из сосуда, содержащего m белых и n черных шаров, последовательно извлекают шары до появления белого шара. Найти математ. ожидание числа вынутых черных шаров, если каждый шар после извлечения возвращается в сосуд.

Решение: Главной числовой хар-кой сл. вел-ны является математич. ожид.

m - белые; n - черные; ξ - число вынутых черных шаров.

Нач. моментом n-го порядка случ. величины ξ называется значение интеграла Стилтьеса.

$$\alpha_n = M\xi^n = \int_{R^1} x^n dF_\xi(x)$$

Начал. момент первого порядка: $\alpha_1 = M\xi$ наз. мат ожиданием.

центр. момент II порядка, $\mu_2 = M(\xi - M\xi)^2$ - дисперсия $= D\xi$

Итак: $P(\xi = k) = P(Ч_1 \cdot Ч_2 \dots Ч_k \cdot Б_{k+1}) =$

$= P(Ч_1) \cdot P(Ч_2) \dots P(Ч_k) \cdot P(Б_{k+1}) = \left(\frac{n}{n+m}\right)^k \cdot \frac{m}{n+m}$

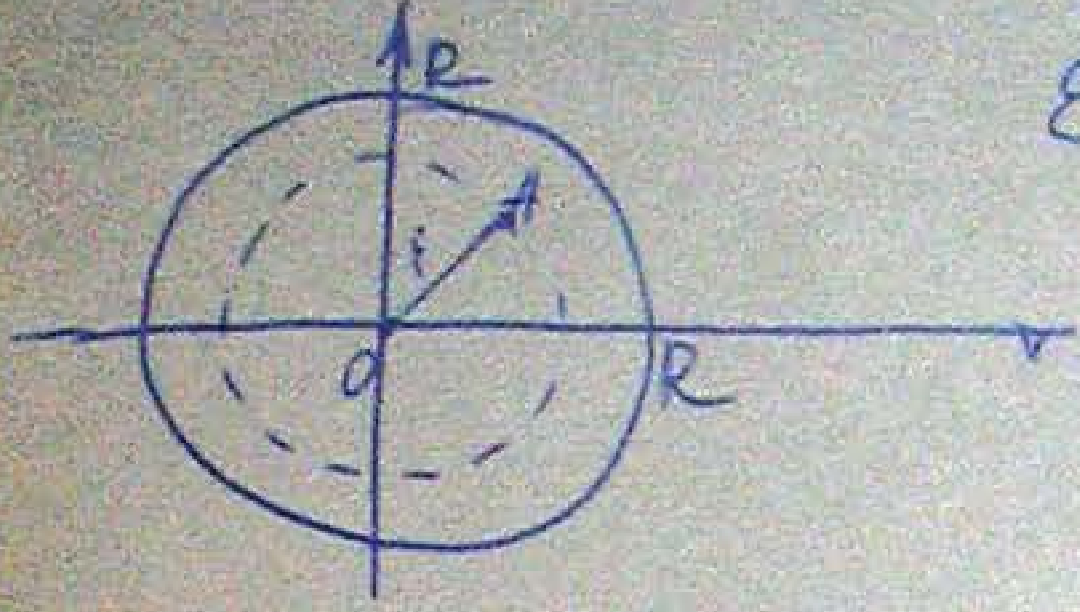
$M[\xi] = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+m}\right)^k \cdot \frac{m}{n+m} \cdot k =$; т.к. $M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\xi \geq k\}$

$= \left\| \frac{n}{n+m} = q \right\| = \frac{mq}{n+m} \cdot \frac{d}{dq} \sum_{i=1}^{\infty} q^k = \frac{n}{m}$

$D[\xi] = \frac{m}{n+m} \sum_{i=0}^{\infty} \left(k - \frac{n}{m}\right)^2 q^k = \dots = \frac{n(n+m)}{m^2}$

Билет №2.

Точка A бросается наудачу внутрь круга радиуса R. Найти плотность вероятностей и математическое ожидание случайной величины X – расстояние от т. A до центра круга, считая равновозможным попадание точки в любое место круга!



$\xi = OA$ – случайная величина

Найти: $f_\xi(x) = ?$ – плотность вероятностей.

$M[\xi]$ – мат. ожидание $= ?$

Через функцию распределения:

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) \quad x \in R.$$

$$F_\xi(x) = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \frac{x^2}{R^2}$$

$$f_\xi(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx} = \frac{2x}{R^2}.$$

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x > R. \\ \frac{2x}{R^2}, & 0 < x < R. \end{cases}$$

$$M_\xi = \int_0^R x \frac{2x}{R^2} dx = \qquad \text{т.к. } \alpha_k = M\xi^k = \int x^k dF_\xi(x).$$

$$\Rightarrow M_\xi = \int_0^R x \frac{2x}{R^2} dx = \frac{2R}{3}.$$

Билет 3

Задана двумерная плотность вероятности

$$f_{\xi\eta}(x;y) = \frac{c}{(x^2+y^2+1)^3}$$

случ. вектора $(\xi;\eta)$. Найти постоянную c:

$$\iint\limits_{\text{по всей плоскости}} f_{\xi\eta}(x;y)\,dx\,dy = 1. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array}\right\}$$

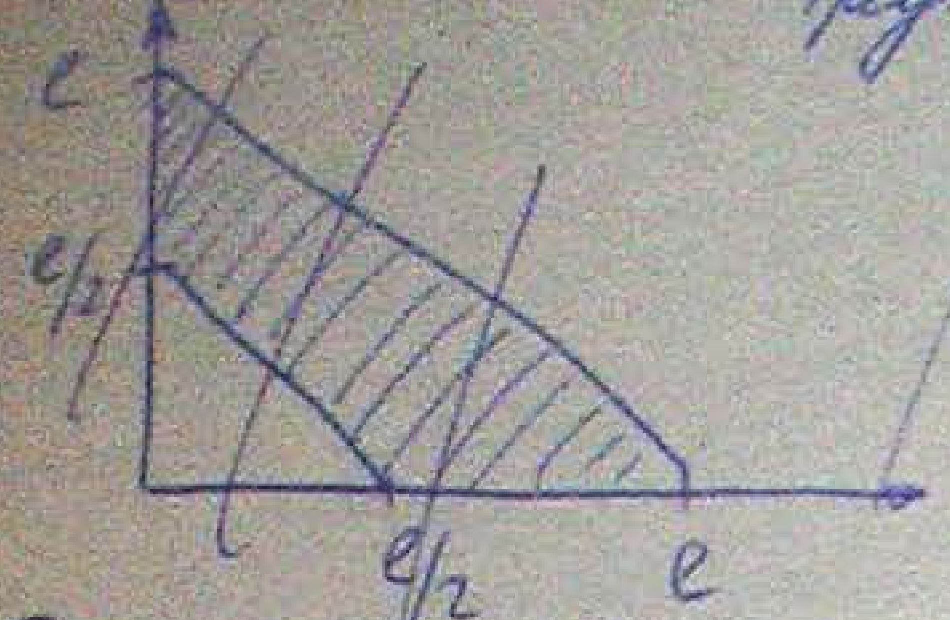
$$1 = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{c}{(x^2+y^2+1)^3}\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} \rho \frac{c}{(\rho^2+1)^3}\,d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} \frac{c}{(\rho^2+1)^3}\,d\rho^2 = c\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}(\rho^2+1)^{-3}\,d(\rho^2+1) =$$

$$= \left.\frac{\pi c}{(\rho^2+1)^2(-2)}\right|_0^{\infty} = \frac{\pi c}{+2} = \frac{\pi c}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{2}{\pi}}$$

Билет №4

Палку длиной l ломают на три куска в двух произвольно выбранных точках. Какова вероятность того, что из трех кусков можно составить треугольник?



Треуг. можно составить, если $a+b > l/2$, но из условия ясно, что $a+b < l$.

$$P(A) = \left[\frac{l^2}{2} - \frac{(l/2)^2}{2}\right] \Big/ \left[\frac{l^2}{2}\right] = \frac{3}{4}.$$

Решение: Согласно геометрической схеме исчисления вероятностей:

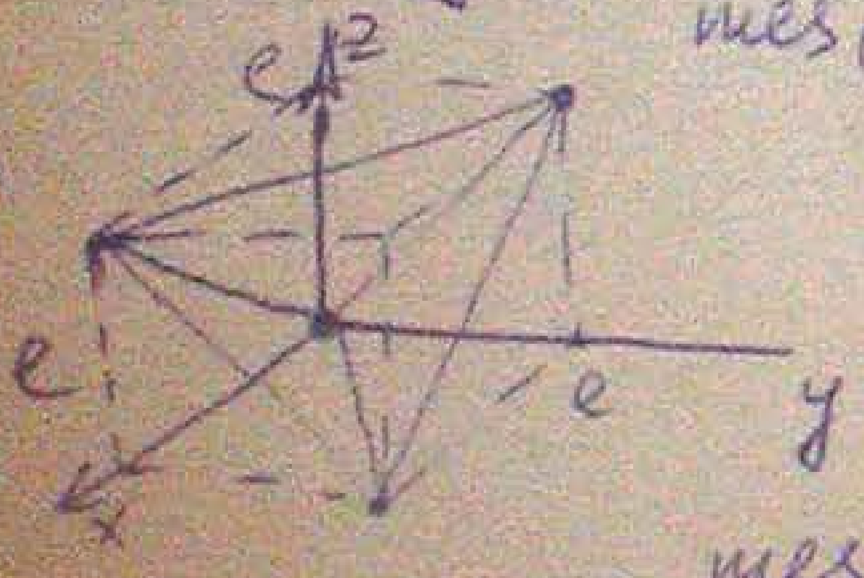
$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)},$$ где mes = мера-измерение (в нашем случае $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = 3 \Rightarrow mes$ = объему)

Палку ломают: $0 \le x \le l$.
$0 \le y \le l$
$0 \le z \le l$.

A: $x + y > z$
$y + z > x$
$z + x > y$.

$mes(\Omega) = V_{\text{параллелепипеда}}$, со сторонами l.

$mes(A) = V_{\text{тетраэдра}}$ с точками $(0;0;0)$; $(0;l;l)$; $(l;0;l)$ $(l;l;0)$



$mes(\Omega) = l^3$

$$mes(A) = \left| \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & l & l & 1 \\ l & 0 & l & 1 \\ l & l & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6}\left[l^3 + l^3\right] = \frac{2l^3}{6} = \frac{l^3}{3}$$

Тогда $P(A) = \dfrac{l^3}{3l^3} = \dfrac{1}{3}$

Билет 5

Два баскетболиста поочередно бросают мяч по кольцу пока один из них не попадет. Пусть N – число бросаний $1^{ого}$ баскетболиста, а M – второго баскетболиста. Найти законы распределения указанных случ. величин, если вероятности попадания игроков равны соответственно 0,4 и 0,6.

Решение:

$\xi_1 = i$ – с i-ой попытки попадает 1-ый.

$\xi_2 - i$ – с i-ой поп 2-ой

$P(\xi = c_i) = p_i \quad , \quad \sum_{i=1} p_i = 1.$

ξ – дискретная вел-на

$p_1 = 0{,}4$ – попадает 1-ый.

$p_2 = 0{,}6$ – попадает 2-ой

$q_1 = 1 - p_1$;

$q_2 = 1 - p_2$;

$P(\xi_1 = k) = (q_1 \cdot q_2)^{k-1} \cdot p_1 + (q_1 \cdot q_2)^{k-1} q_1 p_2.$

$P(\xi_2 = k) = q_1 \cdot (q_1 \cdot q_2)^{k-1} \cdot p_1 + (q_1 q_2)^{k} \cdot p_2$

$\xi_1 = 1, 2, \ldots$

$\xi_2 = 0, 1, 2, \ldots$

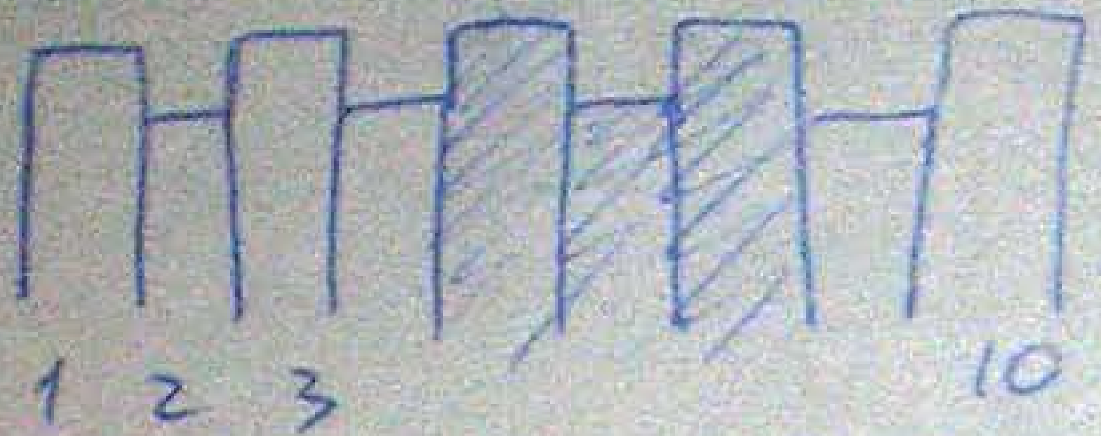
Функция распред: $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$, $x \in \mathbb{R}^1$

Ответ: $\boxed{F_{\xi_1}(k) = \sum_{i=1}^{k-1} (q_1 \cdot q_2)^{i-1} \cdot (p_1 + q_1 p_2)}.$

$\boxed{F_{\xi_2}(k) = \sum_{i=1}^{k-1} (q_1 \cdot q_2)^{i-1} \cdot (q_1 p_1 + q_1 q_2 p_2)}.$

Билет № 6.

На книжной полке 10 книг. Их уронили, а затем расставили наугад. Какова вероятность, что 3 тома Фихтенгольца окажутся рядом.



$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} = \frac{8 \cdot 3!\,7!}{10!} =$$

$$= \frac{6}{9 \cdot 10} = \frac{1}{15}.$$

Или: общее число возможных сочетаний!

$$C_n^k = \frac{n!}{k!}(n-k)!$$

Итак ; $k = 3$, $n = 10$. $\Rightarrow C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 3 \cdot 10}{2} = 120$.

[illegible]

~~Или:~~ $\cancel{P(A) = (2^3) \cdot C_{10}^3 = \frac{1}{15}}$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15} = P(A).$$

$k = 8$

Билет № 7

Трое игроков поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет „герб". Определить вероятность выигрыша для каждого из игроков.

Решение: A_i – выигрывает i-й игрок (взаимоискл. события) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

Пусть $P(A_1) = p_1$; B – попадает на герб $\Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$

$$P(A_2) = P(A_2 \cdot \overline{B}) = P(A_2) \cdot P(\underbrace{\overline{B} \mid A_2}_{\text{независим}}) = P(A_2) \cdot P(\overline{B}) =$$

$$= \frac{1}{2} p_1.$$

$$P(A_3) = P(A_3 \cdot \overline{B}) = P(A_3) \cdot P(\overline{B}) = \frac{1}{2} p_2.$$

Тогда: $p_1 + \frac{1}{2} p_1 + \frac{1}{4} p_1 = 1 \Rightarrow \frac{7}{4} p_1 = 1 \Rightarrow \boxed{p_1 = \frac{4}{7}} \Rightarrow \boxed{p_2 = \frac{2}{7}} \Rightarrow$

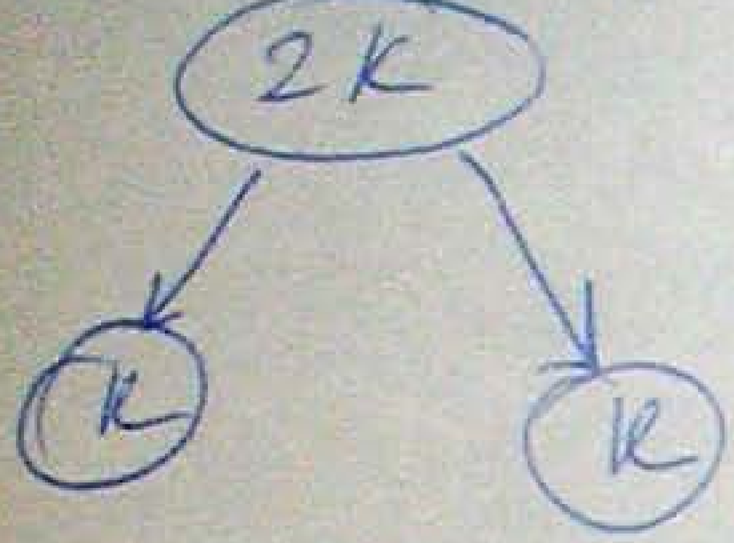
$$\Rightarrow \boxed{p_3 = \frac{1}{7}}$$

Билет №8.

В первенстве участвуют 2К команд. С помощью жеребьевки их разбивают на два полуфинала по К в каждом. Какова вероятность, что две сильнейшие команды окажутся:

а) в разных группах (событие A)

б) в одной группе (событие $\bar{A}$).



Вероятность попадания 1ой сильнейшей команды в 1-ую группу равна $1/2$. Во 2ую тоже $1/2$. Аналогична для второй команды.

$P(A) = 2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/2$; $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 3/4$.

Билет № 9.

В урне 3 белых и 7 красных шара. Какова вероятность, что два вынутых наугад шара будут разного цвета?

Решение: $3+7=10$

$P(A)=\frac{k}{n}$ - по классич. схеме исчисл. вероятн.

где $\Omega=\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$ - пр-во элемент. событий, n - конечно.

$A=\{\omega_{i_1},\dots,\omega_{i_k}\}$, $k\le n$ - выпадение шаров разного цвета

Теперь воспользуемся ф-лами комбинаторики

Сочетание - неупорядоч. выборка k элементов из n

Мы неупорядоченно выбираем $\Rightarrow$

$\Rightarrow C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ - число сочетаний примет вид.

$n=C_{10}^2=\frac{10!}{2!\,8!}=45$

$k=C_3^1\cdot C_7^1=\frac{3!}{2!}\cdot\frac{7!}{6!}=3\cdot7=21$

Тогда $P(A)=\frac{k}{n}=\frac{21}{45}=\boxed{\frac{7}{15}=P(A)}$

Ответ: $P(A)=\frac{7}{15}$.

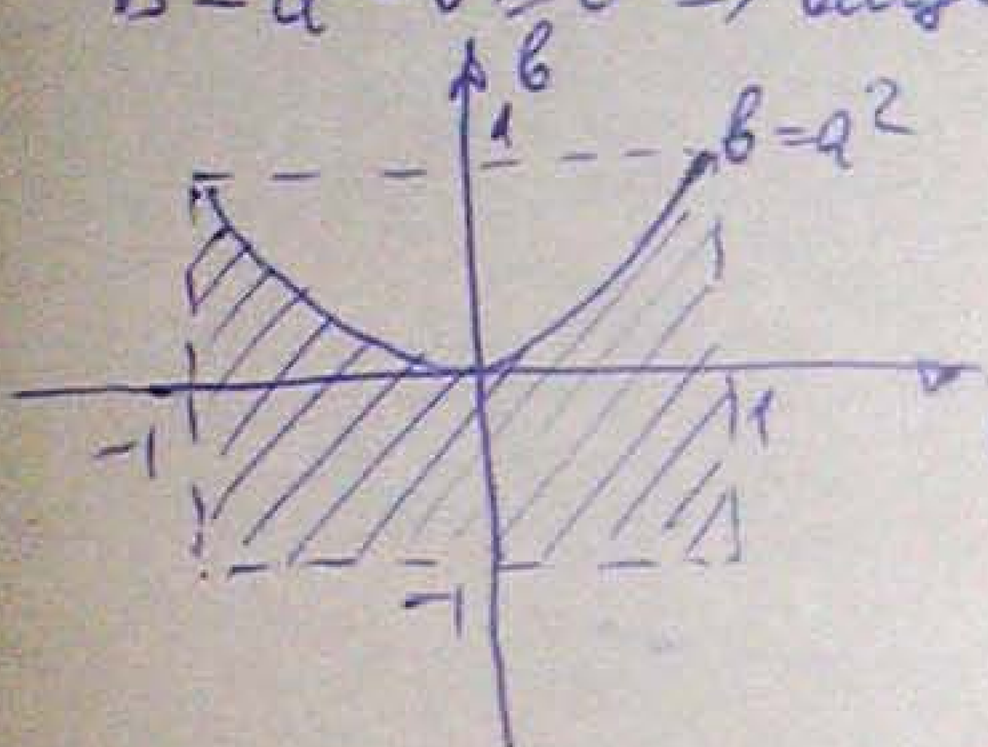
Билет №10

Найти вероятность того, что корни квадратного уравнения с равной возможностью могут принимать значения интервалов $a \in [-1;1]$; $b \in [-1;1]$.

Решение: Воспользуемся геометр. схемой исчисления вероятностей:

$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}$; $mes = mesure$ (измерение), у нас $A \in \Omega \in R^n$, $n = 2 \Rightarrow mes =$ площадь

$\Delta = a^2 - b \geq 0 \Rightarrow$ вещественные корни $\Rightarrow b \leq a^2$.



$mes(\Omega) = 4$.

$mes(A) = 2 + \int_{-1}^{1} x^2 dx = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} = \frac{8}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3} = P(A)$

Билет № 11

Дискретная случ. величина X подчиняется закону Пуассона.

$P\{X=k\} = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$; $a>0$; $k=0,1,2\ldots$

Найти ее характ. ф-цию, мат. ожидание и дисперсию.

Решение: $\Theta_\xi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{(iuk-a)} \cdot \frac{a^k}{k!} = e^{-a} \cdot \sum$

ответ

$\cdot \sum \frac{(e^{iu}\cdot a)^k}{k!} = e^{-a} \cdot e^{e^{iau}} = \boxed{e^{a(e^{iu}-1)} = \Theta_\xi(u)}$

$M_\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{a^{k-1}}{k!} \cdot a \cdot a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} e^{-a} \cdot a = e^{-a} \cdot e^{a} \cdot a =$

$= \boxed{a = M_\xi}$ – ответ

$D_\xi = \sum_{k=0}^{\infty} (k-a)^2 \cdot \frac{a^k}{k!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} (k^2 - 2k\cdot a + a^2) =$

$= e^{-a}\left[a^2 \cdot e^{a} - 2a\cdot a\cdot e^{a} + \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{a^k}{k!}\right] = e^{-a}\left[-a^2 e^{a} + a +\right.$

$\left. + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a^{k-2}}{(k-2)!} a^2 \right] = \boxed{a \cdot e^{-a} = D_\xi}$ ответ.

Билет № 12.

Множество возможных значений случайной величины X состоит из двух чисел a и в. Для какого ряда распределения величины X дисперсия $\Delta[X]$ - максимальна?

$P(\xi=a)=p_1$

$P(\xi=b)=p_2$

$p_1+p_2=1$

$$\Delta\xi=\mu_2=\left\{\text{т.к. } \mu_n=\sum_{i=1}^{n}(c_i-M\xi)^n p_i\right\}=$$

$$=p_1(a-M\xi)^2+p_2(b-M\xi)^2=p_1(a-ap_1-p_2b)^2+$$

$$+p_2(b-ap_1-bp_2)^2=\left\{\begin{aligned}M\xi&=aP\{\xi=a\}+bP\{\xi=b\}=\\&=ap_1+bp_2\end{aligned}\right\}$$

$$=p_1(a^2-2(ap_1+bp_2)a+(ap_1+bp_2)^2+$$

$$+p_2(b^2-2(ap_1+bp_2)b+(ap_1+bp_2)^2)=$$

$$=(ap_1+bp_2)^2-2(ap_1+bp_2)(ap_1+bp_2)+p_1a^2+p_2b^2=$$

$$=p_1a^2+p_2b^2-a^2p_1^2-2abp_1p_2-b^2p_2^2=a^2p_1\overbrace{(1-p_1)}^{=p_2}+$$

$$+b^2p_2\overbrace{(1-p_2)}^{=p_1}-2abp_1p_2=p_1p_2(a^2-2ab+b^2)=p_1p_2(a-b)^2$$

$p_2=1-p_1$

$$p_1\cdot(1-p_1)(a-b)^2=\left(p_1-p_1^2(a-b)^2\right)'_{p_1}=$$

$$=(a-b)^2(1-2p_1)=0$$

$$p_1=p_2=\frac{1}{2}$$

Билет 13

Студент знает лишь один вопрос из 3-х, подготовленных преподавателем для опроса. Каждый вопрос задают одному студенту и каждый студент может быть вызван лишь один раз. Какова вер-ть нашему знающему получить „неуд"?

Уточнение: всего m студентов;

$P(A)=\frac{k}{n}$; n – число всех возможных элемент. событий.

$k \le n$.

k – число элемент. событий, когда студент получит „неуд"

Воспользуемся ф-лами комбинаторики.

Размещение – упорядоченная выборка k элементов из n.

$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$ – число всех размещений.

$n=A_m^3=m(m-1)(m-2)$

K_{1} (студент знает ответ на 1-ый вопрос) $=A_{m-1}^1\cdot A_{m-2}^1\cdot A_1^1+A_{m-1}^1\cdot A_1^1\cdot A_{m-2}^1=(m-1)(m-2)\cdot 1\cdot 2=$

$=K_2=K_3 \Rightarrow P(A)=\frac{K}{n}=\frac{2(m-1)(m-2)}{m(m-1)(m-2)}=$

$=\frac{2}{m}=P(A)$

Билет № 14

Задана плотность распределения случ. вектора $(x;y)$: $f(x;y) = \begin{cases} \sin(x+y)/2 & (x;y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$

где $D = \{(x;y): x \in [0;\frac{\pi}{2}]; y \in [0;\frac{\pi}{2}]\}$. Найти математические ожидания составляющих X и Y.

Решение: Воспользуемся условием согласования:

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x;y)\,dy.$$

$$f_\xi(x) = \int_0^{\pi/2} f_{\xi\eta}(x;y)\,dy = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\cos(x+\frac{\pi}{2}) - \cos x\right) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x),\ x \in [0;\frac{\pi}{2}]$$

$$M[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} x \cdot f_\xi(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x)\,x\,dx$$

$$= \ldots = \frac{\pi}{4}$$

x, и y - симметричны $\Rightarrow M_\eta = \frac{\pi}{4}$.

$$D_\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \int_0^{\pi/2} x^2 \cdot \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)\,dx -$$

$$-\frac{\pi^2}{16} = \ldots = \frac{1}{16}(\pi^2 + 8\pi - 32) = \boxed{D_\xi}.$$

D_η симметр. D_ξ.

Билет № 15.

Свободный член ξ квадр. ур-я $x^2 - 2x + \xi = 0$ рав-но распределен на отрезке $[-1; 1]$. Найти з-н распределен. меньшего корня X ур-я.

Решение. $f_\xi(x) = \frac{1}{2}$.

$[-1; 1] \Rightarrow y \in [1 - \sqrt{1+1}; 1 - \sqrt{1-1}]$

$y \in [1 - \sqrt{2}; 1]$

$x^2 - 2x + \xi = 0$.

$D = 1 - \xi > 0$.

$y = \underbrace{1 - \sqrt{1-\xi}}_{\varphi(\xi)}$.

$(1-y)^2 = 1 - \xi \Rightarrow \xi = \underbrace{2y - y^2}_{\psi(y)}$.

$$f_y(y) = f_\xi(\psi(y)) \cdot \left|\frac{d\psi(y)}{dy}\right| \cdot 1_{D_1}(y) = \frac{1}{2} \cdot (2 - 2y) \cdot 1_{D_1}(y) =$$

$$= (1-y)\, 1_{D_1}(y) = (1-y) \cdot 1_{[1-\sqrt{2}; 1]}(y) = f_y(y)$$

Билет № 16

Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы появление хотя бы одной шестерки имело вероятность

а) большую 0,5?

б) большую 0,8?

Решение: A_i – в i-м опыте „6".

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_n}) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n}) =$$

$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

а) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{1}{2}$

$$1{,}2^n > 2$$

$$\boxed{n > \log_{1,2} 2}$$

б) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > \frac{4}{5} \Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{n > \log_{1,2} 5}$

Использовали: $P(\overline{A_1 + \ldots + A_n}) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n})$

$$P(A_1 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1 + \ldots + A_n})$$

Теорема умножения:

$$P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n | A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$$

$P(B|A) = P(B)$, если B и A независимые

Ответ: а) $n > \log_{1,2} 2$.

б) $n > \log_{1,2} 5$

Билет № 17.

Пусть $\bar{X}$ - случ. величина с непрер. функцией распред. $F(x)$. Найдите з-н распределения случ. величины $Y = F(x)$.

Решение: $Y = F(x)$

$\bar{X} \to F(x)$

$\bar{X} = \{x_1, \dots x_n\}$.

$$F(Y) = \int\limits_{D(y)} f_y(x)\,dx$$

$$f_y(x) = \frac{\partial^n F(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \Rightarrow$$

Ответ:

$$F(Y) = \int\limits_{D y} \frac{\partial^n F(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}\,dx.$$

Билет № 18.

Огибающая узкополосного нормального шума ξ задается плотностью вер-ти (з-н Релея).

$$f_\xi(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \cdot 1(x)$$

Одинаково ли часто встречаются значения ξ, большие и меньшие математ. ожидания $M\xi$?

Решение: $M\xi = \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^2}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx}_{\text{интеграл Эйлера.}} = \left\{ \begin{aligned} \frac{x^2}{2\sigma^2} &= t \\ \frac{x}{\sigma^2} dx &= dt \end{aligned} \right\} =$

$$= \int_0^\infty \exp(-t) \cdot \frac{\sigma^2}{x} \cdot \frac{x^2}{\sigma^2} dt = \sqrt{2}\sigma \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}} \exp(-t) dt = \quad ;\ z-1 = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \frac{3}{2}.$$

$$= \sqrt{2}\sigma\, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{2}\sigma \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}_{\sqrt{\pi}} = \sigma \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$ – среднее квадратичное отклонение, характеризует разброс значения случ. величины ξ относит. среднего значения.

$$M\xi^2 = \int_0^\infty \frac{x^3}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \left\{ \begin{aligned} \frac{x^2}{2\sigma^2} &= t. \\ dx &= \frac{\sigma^2}{x} dt \end{aligned} \right\} = 2\sigma^2 \int_0^\infty t \cdot \exp(-t) dt =$$

$$= 2\sigma^2 \left[-t \cdot \exp(-t) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \exp(-t) dt \right] = 2\sigma^2 \left[-\exp(-t) \Big|_0^\infty \right] =$$

$$= 2\sigma^2$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 2\sigma^2 - \frac{\sigma^2 \pi}{2} = \frac{\sigma^2}{2}(4-\pi); \quad \sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \frac{\sigma^2\sqrt{4-\pi}}{\sqrt{2}} \text{ не}$$

зависит от $\xi \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ответ: нет

Билет 19.

Доля „счастливых" билетов в катушке $p \approx 0{,}053$. Какова вероятность иметь хотя бы один такой билет из 2-х купленных если а) билеты соседние б) билеты с разных рейсов?

Решение. Пользуемся если A и B - независимые $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Еще, если A и B - независимы $\Rightarrow$ независимы A и $\overline{B}$.

Еще, если события взаимоисключ. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P(A_1 + \ldots + A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n).$$

A_1 - 1-й билет счастливый.

A_2 - 2-й билет счастливый.

а) $p \approx \frac{M}{N}$; $P(A)$ - ?

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2 \cdot \overline{A_1}) = P(A_1) + P(A_2) \cdot P(\overline{A_1}) = \frac{M}{N} + \frac{M}{N-1}\left(1 - \frac{M}{N}\right) =$$

$$= \frac{M}{N} + \underbrace{\frac{M}{N-1}}_{\approx p} - \frac{M^2}{N(N-1)} = \boxed{2p - p^2 = P(A)}.$$

б) $P(A) = \frac{M}{N} + \frac{M}{N} = \boxed{2p = P(A)}.$

Ответ: а) $P(A) = 2p - p^2$.

б) $P(A) = 2p$

Билет 20

Из партии в 5 изделий наудачу взято одно изделие, оказавшееся бракованным. Какая гипотеза о кол-ве бракованных изделий в партии наиболее правдоподобна?

Решение: H_i – i-е изделие бракованное

A – взяли 1 бракованное изделие.

По т. Байеса:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)\cdot P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)\,P(A|H_j)}$$ не зависит от i

$P(H_i) = \frac{i}{5}$; $P(A|H_i) = \frac{1}{C_5^i}$ (использовали ф-лы комбинаторики)

$\frac{i}{5}\cdot\frac{1}{C_5^i}$ maxim при: $\frac{i\cdot i!\,(5-i)!}{5\cdot 5!}$ maxim $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ посчитав получили $\underline{i=5}$.

Билет 21

В урне n шаров, причем все предположения о количестве в ней черных шаров равновероятны. Последоват. извлечены k шаров, оказавшиеся черными. Какова вероятность, что все n шаров в урне черные, если после вынимания: а) опускается обратно; б) обратно не опускается.

Решение:

H_i – в урне i черных шаров

$P(H_i) = \frac{1}{n}$

а) т. Байеса: $\{H_1, \dots, H_n\}$ – полная группа событий.

и $P(A) > 0$; $P(H_i) > 0$; $\forall i$.

то $P(H_i|A) = \dfrac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P(A|H_j)}$

$$P(H_n|A) = \frac{P(H_n) \cdot \underbrace{P(A|H_n)}_{=1}}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P(A|H_j)}$$

$P(A|H_j) = \dfrac{j^k}{n^k}$ опускают $\Rightarrow \boxed{P(H_n|A) = \dfrac{n^k}{\sum\limits_{j=1}^{n} j^k}}$

б) $P(H_n|A) = \dfrac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(A|H_j)}$

$j < k \Rightarrow P(A|H_j) = 0$.

$N = C_n^k$ – не опускают (из формулы комбинаторики)

$j \geq k$ $P(A|H_j) = \dfrac{C_j^k}{C_n^k}$

$$\boxed{P(H_n|A) = \frac{C_n^k}{\sum\limits_{j=k}^{n} C_j^k}}$$

Билет № 22

Два стрелка независимо друг от друга совершают по одному выстрелу в общую мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Какова вероятность, что в мишень попал 1^ый стрелок?

Решение: H_1 – попал 1-ый. $P(H_1)=0,8$.

H_2 – попал 2-ой $P(H_2)=0,4$.

A – один из них попал.

$\{H_1; H_2\}$ – полная группа ⟹ имеет место ф-ла полной вероятности.

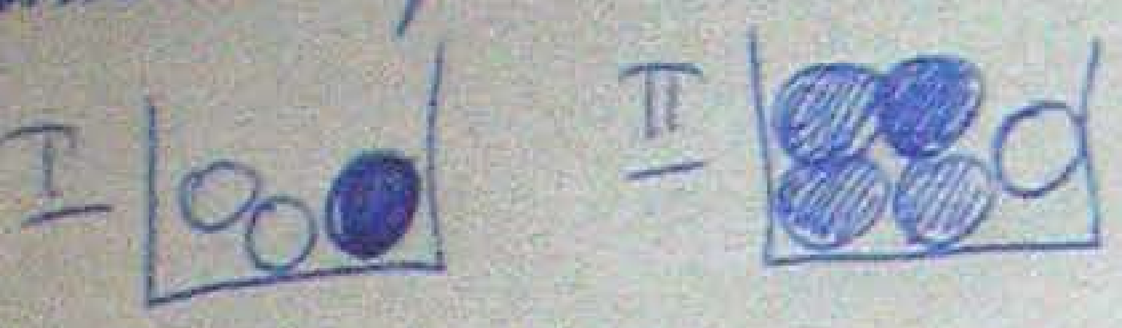
$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A|H_i)=0,8\cdot(1-0,4)+0,4(1-0,8)=0,56.$$

По ф-ле Байеса: $P(B|A)=\dfrac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(A)}$

$$P(H_1|A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(A)}=\frac{0,8\cdot 0,6}{0,56}=\boxed{\frac{6}{7}=P(H_1|A)}$$

Билет №23.

Имеются два одинаковых ящика с шарами: в одном 2 белых и 1 черный шар; в другом 1 белый и 4 черных шара. Наудачу выбирают один из ящиков и вынимают из него шар. Какова вероятность, что этот шар белый?



A – появление белого шара.

H_1 – выбран первый ящик.

H_2 – выбран второй ящик

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{13}{30}.$$

Использовано:

$\{H_1; H_2\}$ – полная группа, т.к. $H_1 \cup H_2 = \Omega$, $H_1 \cap H_2 = \varnothing$.

Тогда имеет место ф-ла полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{2} P(H_i)\cdot P(A|H_i)$$

Билет 24

Студент пришел на экзамен, зная лишь 20 из 25 вопросов. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Используя понятие условной вероятности, найти вероятность того, что студент знает все заданные вопросы.

Решение $P\left(\bigcap_{i=1}^{3} A_i\right) = \underbrace{P(A_1)}_{\frac{20}{25}} \cdot \underbrace{P(A_2|A_1)}_{\frac{19}{24}} \cdot \underbrace{P(A_3|A_1 \cdot A_2)}_{\frac{18}{23}} =$

$= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{25 \cdot 24 \cdot 23} = \frac{4 \cdot 19 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 23} = \frac{57}{115} = P(A)$.

Билет № 25.

Вася и Петя договорились встретиться в библиотеке между 12 и 13 часами дня. Полагая, что они приходят независимо и равновозможно в течение этого часа, найти интегральную функцию распределения времени ожидания Васи Петей.

Теория. Пусть ξ — случ. величина, принимающая не более чем счетное число изолированных возможных значений $c_1, c_2, \ldots, c_n$ с вероятностями

$P(\xi = c_i) = p_i$; $\sum_{i=1} p_i = 1$. Тогда ξ – наз. дискр. случ. величиной, а совокупность вероятностей $\{p_1, p_2, \ldots, p_n \ldots\}$ – рядом распределения этой величины.

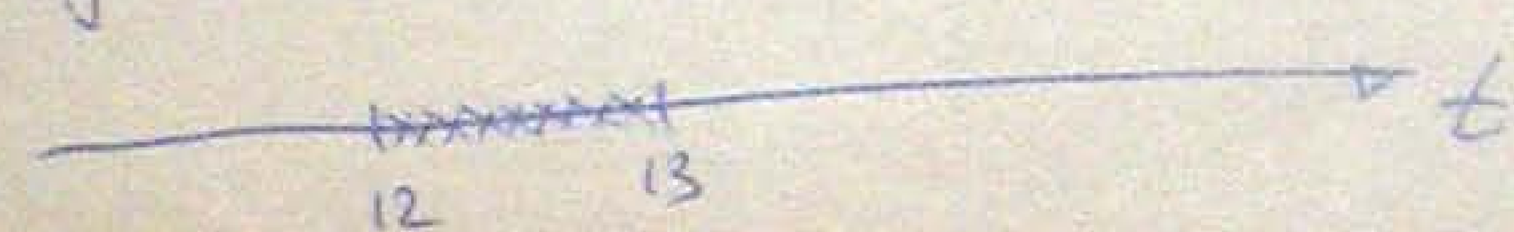
Функция распределения $F_\xi(x)$ случ. величины ξ определяется равенством:

$$F_\xi(x) = P(\xi < x)$$

Итак:

τ – время ожидания Васи Петей, тогда

$F_\tau(x) = ?$



Геометрическая схема:

t_1 – время прихода Пети

t_2 – время прихода Васи.

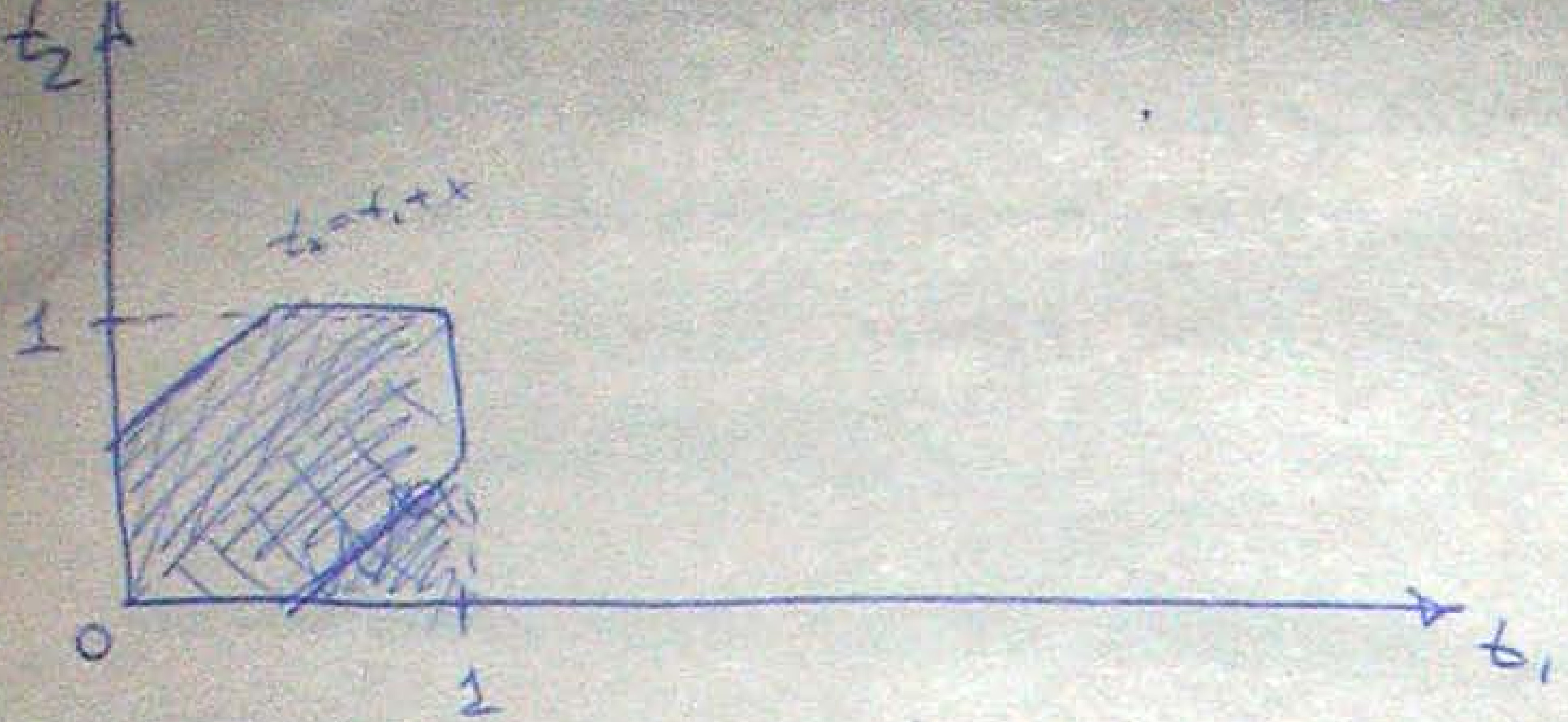
$$0 \le t_1 \le 1$$

$$0 \le t_2 \le 1$$

если $t_2 < t_1 \Rightarrow \tau = 0$.

если $t_2 > t_1 \Rightarrow \tau \neq 0$ $(\tau > 0)$ $(\tau \neq 0)$

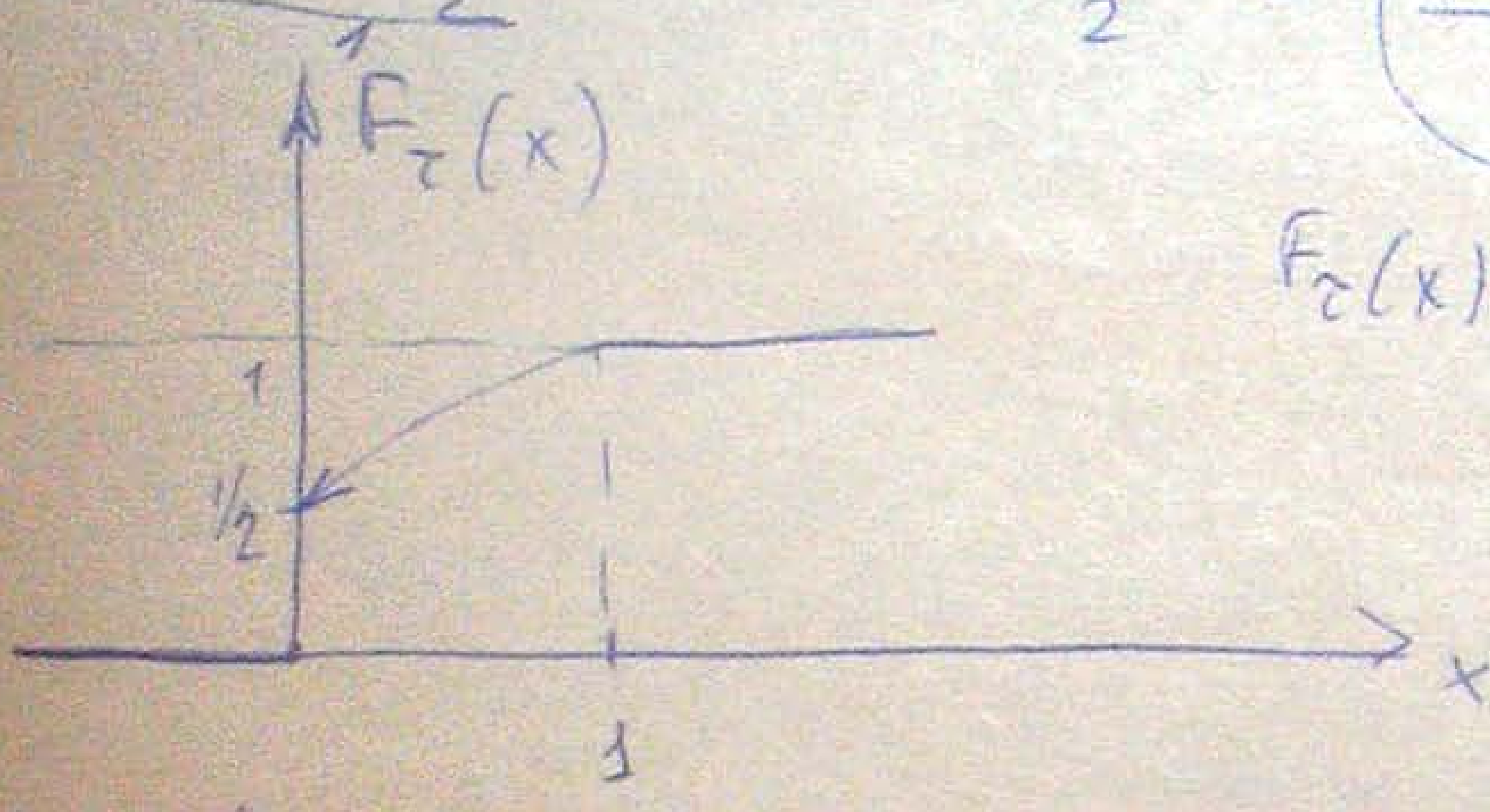
$F_\tau(x) = P(\tau < x) = P(t_2 - t_1 < x)$.



$t_2 - t_1 = x \Rightarrow t_2 = t_1 + x$

Вероятность: $P(t_2 - t_1 < x) =$ отношению площадей $=$

$$= 1 - \frac{\frac{(1-x)^2}{2}}{1} = 1 - \frac{1 - 2x + x^2}{2} = \frac{1 + 2x - x^2}{2}$$ функция распредел.



$$F_\tau(x) = \begin{cases} 0, & x < 0. \\ \frac{1+2x-x^2}{2}, & 0 < x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$P(t = 0) = \frac{1}{2}$ (Петя не ждет Васю)

Задача   Билет 27

Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наугад. Какова вер-ть, что ему придется звонить не более, чем в 3 места?

Решение: A - звонит не более, чем в 3 места

A_1 - попадает с 1-ой попытки.

A_2 - попадает со 2-ой попытки.

A_3 - попадает с 3-х попытки.

Учитываем: если A и B независимы $\Rightarrow$ независимы A и $\overline{B}$.

если $P(A|B) = P(A) \Rightarrow$ независимы

Еще учитываем, что взаимоисключающие события $\Rightarrow P(A_1 + \ldots + A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$.

$P(A_1) = \frac{1}{10}$.

$P(A_2) = P(B_2 \cdot \overline{A_1}) = \frac{1}{9} \cdot P(\overline{A_1})$

$P(A_3) = P(B_3 \cdot \overline{A_2}) = \frac{1}{8} \cdot P(\overline{A_2})$

B_2 - попадает с 1-ой попытки из 9.

B_3 - попадает с 1-ой попытки из 8, $= P(B_3)$

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{10} + \frac{1}{9} \cdot \underbrace{P(\overline{A_1})}_{1-P(A_1)} + \frac{1}{8} \cdot \underbrace{P(\overline{A_2})}_{P(\overline{B_2}) \cdot P(\overline{A_1})} =$$

$P(\overline{B_2}) = 1 - P(B_2)$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{8} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} = \boxed{\frac{3}{10} = P(A)}$$