Вопросы
по Теории Вероятностей

1. Понятия испытания и случайного события.
2. Понятие статистической устойчивости.
3. Относительная частота появления случайного события. Статистическое определение вероятности.
4. Исчисление вероятностей по схеме шансов.
5. Исчисление вероятностей комбинаторными методами.
6. Алгебра событий.
7. Свойства вероятностей.
8. Геометрическое исчисление вероятностей. Задача Бюффона.
9. Диаграммы Венна.
10. Теорема сложения вероятностей.
11. Понятие условных вероятностей.
12. Формула умножения вероятностей.
13. Формула полной вероятности.
14. Формула Байеса.
15. Понятие несовместных событий. Противоположная вероятность.
16. Понятие независимых событий. Формула умножения вероятностей для независимых событий.
17. Парадокс Бернштейна.
18. Вероятность объединения независимых событий.
19. Закон распределения дискретных случайных величин.
20. Интегральная функция распределения. Ее свойства.
21. Плотность вероятностей непрерывной случайной величины. Ее свойства.
22. Понятие математического ожидания (статистического среднего) случайной величины. Среднее суммы случайных величин.
23. Плотность вероятностей и статистические средние функций случайных величин.
24. Моменты и центральные моменты. Дисперсия случайной величины.

25. Понятие характеристической функции. Вычисление моментов с помощью характеристической функции.
26. Свойства характеристических функций. Свойство положительной определенности.
27. Испытания Бернулли. Биномиальное распределение.
28. Закон Пуассона (закон редких событий).
29. Локальная теорема Муавра-Лапласа.
30. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.
31. Распределение Гаусса (нормальное распределение).
32. Плотность вероятностей функции случайных величин.
33. Совместная интегральная функция распределения совокупности случайных величин.
34. Совместная плотность вероятностей совокупности случайных величин. Статистические средние функции нескольких случайных величин.
35. Условные интегральная функция распределения и плотность вероятностей.
36. Плотность вероятностей суммы случайных величин.
37. Плотности вероятностей функций нескольких случайных величин.
38. Понятие корреляции и ковариации случайных величин. Ковариационная матрица.
39. Коэффициент корреляции. Его свойства.
40. Дисперсия суммы независимых случайных величин.
41. Неравенство Чебышева.
42. Закон Больших Чисел в форме Чебышева.
43. Многомерные характеристические функции. Характеристическая функция суммы независимых случайных величин.
44. Кумулянты. Асимметрия и эксцесс.
45. Центральная Предельная Теорема.
46. Понятие гауссовой совокупности случайных величин.
47. Совместная плотность вероятностей двумерной гауссовой совокупности.
48. Характеристическая функция двумерной гауссовой совокупности.

Задачи
к билетам по теории вероятностей

Задача 1

В урне 3 белых и 7 красных шара. Какова вероятность, что два вынутых наугад шара будут разного цвета (событие A)?

Задача 2

На книжной полке 10 книг. Их уронили, а затем расставили наугад. Какова вероятность, что три тома Фихтенгольца окажутся рядом.

Задача 3

Знакомый студент знает лишь один вопрос из трех, подготовленных преподавателем для опроса. Каждый вопрос задают одному студенту и каждый студент может быть вызван лишь один раз. Какова вероятность нашему знакомому получить неуд.

Задача 4

В первенстве участвуют $2k$ команд. С помощью жеребьевки их разбивают на два полуфинала по k в каждом. Какова вероятность, что две сильнейшие команды окажутся:

а) в разных группах (событие A)

б) в одной группе (событие $\overline{A}$)

Задача 5

На клетчатую скатерть со стороной клеток d бросают монету радиуса r $(2r < d)$. Найти вероятность, что монета окажется внутри клетки.

Задача 6

Палку длиной ℓ ломают на три куска в двух произвольно выбранных точках. Какова вероятность того, что из трех кусков можно составить треугольник.

Задача 7

Найти вероятность того, что корни квадратного уравнения

$$x^2 + 2ax + b = 0$$

вещественны, если коэффициенты уравнения с равной возможностью могут принимать значения из интервалов $a \in [-1, 1]$, $b \in [-1, 1]$.

Задача 8

Студент пришел на экзамен, зная лишь 20 из 25 вопросов. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Используя понятие условной вероятности, найти вероятность того, что студент знает все заданные вопросы.

Задача 9

Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и потому набирает ее наугад. Какова вероятность, что ему придется звонить не более, чем в три места?

Задача 10

Доля "счастливых" билетов в полной катушке $p \simeq 0,053$. Какова вероятность иметь хотя бы один такой билет из двух купленных, если: а) билеты соседние, б) билеты с разных рейсов?

Задача 11

Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы появление хотя бы одной шестерки имело вероятность: а) большую 0.5, б) большую 0.8?

Задача 12

Трое игроков поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет "герб". Определить вероятности выигрыша для каждого из игроков.

Задача 13

Имеются два одинаковых ящика с шарами: в одном 2 белых и 1 черный шар, в другом - 1 белый и 4 черных шара. Наудачу выбирают один из ящиков и вынимают из него шар. Какова вероятность, что этот шар белый?

Задача 14

В урне n шаров, причем все предположения о количестве в ней черных шаров равновероятны. Последовательно извлечены k шаров, оказавшиеся черными. Какова вероятность, что все n шаров в урне черные, если шар после выемки: а) опускается обратно, б) обратно не опускается.

Задача 15

Из партии в 5 изделий наудачу взято одно изделие, оказавшееся бракованным. Какая гипотеза о количестве бракованных изделий в партии наиболее правдоподобна?

Задача 16

Два стрелка независимо друг от друга совершают по одному выстрелу в общую мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0.8, для второго - 0.4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Какова вероятность, что в мишень попал первый стрелок?

Задача 17

Найти закон распределения и построить интегральную функцию распределения числа попаданий мячом в корзину при четырех бросках, если вероятность попадания при одном броске равна 0.3.

Задача 18

Два баскетболиста поочередно бросают мяч по кольцу, пока один из них не попадет. Пусть N число бросаний первого баскетболиста, а M – второго. Найти законы распределения указанных случайных величин, если вероятности попадания игроков равны, соответственно, 0.4 и 0.6.

Задача 19

Вася и Петя договорились встретиться в библиотеке между 12 и 13 часами дня. Полагая, что они приходят независимо и равновозможно в течение этого часа, найти интегральную функцию распределения времени ожидания Васи Петей.

Задача 20

Множество возможных значений случайной величины X состоит из двух чисел a и b. Для какого ряда распределения величины X дисперсия $D[X]$ максимальна?

Задача 21

Из сосуда, содержащего m белых и n черных шаров, последовательно извлекают шары до появления белого шара. Найти математическое ожидание числа вынутых черных шаров, если каждый шар после извлечения возвращается в сосуд.

Задача 22

Точка A бросается наудачу внутрь круга радиуса R. Найти плотность вероятности и математическое ожидание случайной величины X - расстояния от точки A до центра круга, считая равновозможным попадание точки в любое место круга.

Задача 23

Огибающая узкополосного нормального шума X задается плотностью вероятностей (закон Релея)

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot 1(x).$$

Одинаково ли часто встречаются значения X, большие и меньшие математического ожидания $\langle X \rangle$?

Задача 24

Задана двумерная плотность вероятностей

$$f(x, y) = \frac{c}{(x^2 + y^2 + 1)^3}$$

случайного вектора (X, Y). Найти постоянную c.

Задача 25

Случайный вектор (X, Y) распределен равномерно в круге радиуса R с центром в начале координат. Доказать, что X и Y зависимы, но некоррелированы.

Задача 26

Задана плотность распределения случайного вектора (X, Y)

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin(x + y)/2, & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

где $D = \{(x, y) : x \in [0, \pi/2], \quad y \in [0, \pi/2]\}$. Найти математические ожидания составляющих X и Y.

Задача 27

Пусть X - случайная величина с непрерывной функцией распределения $F(x)$. Найдите закон распределения случайной величины $Y = F(X)$. Укажите способ получения случайной величины с заданным законом распределения $F_0(x)$, если в Вашем распоряжении имеется случайная величина X, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$.

Задача 28

Координата X точечного единичного заряда, расположенного на оси OX, распределена с плотностью $f(x)$. Найти закон распределения потенциала, создаваемого зарядом в точке $(0, 1)$ на плоскости XOY.

Задача 29

Свободный член ξ квадратного уравнения $x^2 - 2x + \xi = 0$ равномерно распределен на отрезке $[-1, 1]$. Найти закон распределения меньшего корня X уравнения.

Задача 30

Случайная величина X распределена по показательному закону:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot 1(x).$$

Каким функциональным преобразованием можно превратить ее в случайную величину Y, распределенную по закону Коши:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi (1 + y^2)} \quad ?$$

Задача 31

Совокупность двух случайных величин X и Y описывается плотностью вероятностей $f(x, y)$. Найти функцию распределения и плотность вероятностей случайной величины $Z = \min\{X, Y\}$. Рассмотреть случай независимых X и Y, равномерно распределенных в интервале $(0, 1)$.

Задача 32

Компоненты скорости $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ частицы, имеющей единичную массу, независимы друг от друга и распределены нормально с параметрами $\left(0, a^2\right)$. Найти закон распределения кинетической энергии частицы W и величины скорости $|\vec{v}|$.

Задача 33

Дискретная случайная величина X подчиняется закону Пуассона:

$$P\{X = k\} = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad a > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Найти ее характеристическую функцию, математическое ожидание и дисперсию.

Задача 34

Случайная величина X задается следующим рядом распределения

$$P\{X = 1\} = P\{X = -1\} = 1/4, \quad P\{X = 0\} = 1/2.$$

Определить характеристическую функцию и моменты случайной величины X.

Билет 1

1. Понятия испытания и случайного события.

2. Понятие характеристической функции. Вычисление моментов с помощью характеристической функции.

Задача:

Из сосуда, содержащего m белых и n черных шаров, последовательно извлекают шары до появления белого шара. Найти математическое ожидание числа вынутых черных шаров, если каждый шар после извлечения возвращается в сосуд.

Билет 2

1. Понятие статистической устойчивости.

2. Свойства характеристических функций. Свойство положительной определенности.

Задача:

Точка A бросается наудачу внутрь круга радиуса R. Найти плотность вероятностей и математическое ожидание случайной величины X - расстояния от точки A до центра круга, считая равновозможным попадание точки в любое место круга.

Билет 3

1. Исчисление вероятностей по схеме шансов.

2. Испытания Бернулли. Биномиальное распределение.

Задача:

Задана двумерная плотность вероятностей

$$f\left(x,y\right)=\frac{c}{\left(x^2+y^2+1\right)^3}$$

случайного вектора (X,Y). Найти постоянную c.

Билет 4

1. Относительная частота появления случайного события. Статистическое определение вероятности.

2. Закон Пуассона (закон редких событий).

Задача:

Палку длиной ℓ ломают на три куска в двух произвольно выбранных точках. Какова вероятность того, что из трех кусков можно составить треугольник.

Билет 5

1. Исчисление вероятностей комбинаторными методами.

2. Распределение Гаусса (нормальное распределение).

Задача:

Два баскетболиста поочередно бросают мяч по кольцу, пока один из них не попадет. Пусть N число бросаний первого баскетболиста, а M – второго. Найти законы распределения указанных случайных величин, если вероятности попадания игроков равны, соответственно, 0.4 и 0.6.

Билет 6

1. Алгебра событий.

2. Плотность вероятностей функции случайных величин.

Задача:

На книжной полке 10 книг. Их уронили, а затем расставили наугад. Какова вероятность, что три тома Фихтенгольца окажутся рядом.

Билет 7

1. Геометрическое исчисление вероятностей. Задача Бюффона.

2. Коэффициент корреляции. Его свойства.

Задача:

Трое игроков поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет “герб”. Определить вероятности выигрыша для каждого из игроков.

Билет 8

1. Диаграммы Венна.

2. Совместная интегральная функция распределения совокупности случайных величин.

Задача:

В первенстве участвуют $2k$ команд. С помощью жеребьевки их разбивают на два полуфинала по k в каждом. Какова вероятность, что две сильнейшие команды окажутся:
а) в разных группах (событие A)
б) в одной группе (событие $\overline{A}$)

Билет 9

1. Теорема сложения вероятностей.

2. Совместная плотность вероятностей совокупности случайных величин. Статистические средние функции нескольких случайных величин.

Задача:

В урне 3 белых и 7 красных шара. Какова вероятность, что два вынутых наугад шара будут разного цвета?

Билет 10

1. Понятие условных вероятностей.

2. Кумулянты. Асимметрия и эксцесс.

Задача:

Найти вероятность того, что корни квадратного уравнения

$$x^2 + 2ax + b = 0$$

вещественны, если коэффициенты уравнения с равной возможностью могут принимать значения из интервалов $a \in [-1, 1]$, $b \in [-1, 1]$.

Билет 11

1. Формула умножения вероятностей.

2. Локальная теорема Муавра-Лапласа.

Задача:

Дискретная случайная величина X подчиняется закону Пуассона:

$$P\{X = k\} = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad a > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Найти ее характеристическую функцию, математическое ожидание и дисперсию.

Билет 12

1. Формула полной вероятности.

2. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

Задача:

Множество возможных значений случайной величины X состоит из двух чисел a и b. Для какого ряда распределения величины X дисперсия $D[X]$ максимальна?

Билет 13

1. Формула Байеса.

2. Плотность вероятностей суммы случайных величин.

Задача:

Студент знает лишь один вопрос из трех, подготовленных преподавателем для опроса. Каждый вопрос задают одному студенту и каждый студент может быть вызван лишь один раз. Какова вероятность нашему знакомому получить неуд.

Билет 14

1. Понятие несовместных событий. Противоположная вероятность.

2. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

Задача:

Задана плотность распределения случайного вектора (X, Y)

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin(x+y)/2, & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

где $D = \{(x, y) : x \in [0, \pi/2], \quad y \in [0, \pi/2]\}$. Найти математические ожидания составляющих X и Y.

Билет 15

1. Понятие независимых событий. Формула умножения вероятностей для независимых событий.

2. Многомерные характеристические функции. Характеристическая функция суммы независимых случайных величин.

Задача:

Свободный член ξ квадратного уравнения $x^2 - 2x + \xi = 0$ равномерно распределен на отрезке $[-1, 1]$. Найти закон распределения меньшего корня X уравнения.

Билет 16

1. Парадокс Бернштейна.

2. Закон больших чисел в форме Чебышева.

Задача:

Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы появление хотя бы одной шестерки имело вероятность: а) большую 0.5, б) большую 0.8?

Билет 17

1. Вероятность объединения независимых событий.

2. Условные интегральная функция распределения и плотность вероятностей.

Задача:

Пусть X - случайная величина с непрерывной функцией распределения $F(x)$. Найдите закон распределения случайной величины $Y = F(X)$.

Билет 18

1. Закон распределения дискретных случайных величин.

2. Понятие корреляции и ковариации случайных величин. Ковариационная матрица.

Задача:

Огибающая узкополосного нормального шума X задается плотностью вероятностей (закон Релея)

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot 1(x).$$

Одинаково ли часто встречаются значения X, большие и меньшие математического ожидания $\langle X \rangle$?

Билет 19

1. Дисперсия суммы независимых случайных величин.

2. Совместная плотность вероятностей двумерной гауссовой совокупности.

Задача:

Доля "счастливых" билетов в полной катушке $p \simeq 0,053$. Какова вероятность иметь хотя бы один такой билет из двух купленных, если: а) билеты соседние, б) билеты с разных рейсов?

Билет 20

1. Интегральная функция распределения. Ее свойства.

2. Центральная Предельная Теорема.

Задача:

Из партии в 5 изделий наудачу взято одно изделие, оказавшееся бракованным. Какая гипотеза о количестве бракованных изделий в партии наиболее правдоподобна?

Билет 21

1. Плотность вероятностей непрерывной случайной величины. Ее свойства.

2. Характеристическая функция двумерной гауссовой совокупности.

Задача:

В урне n шаров, причем все предположения о количестве в ней черных шаров равновероятны. Последовательно извлечены k шаров, оказавшиеся черными. Какова вероятность, что все n шаров в урне черные, если шар после выемки: а) опускается обратно, б) обратно не опускается.

Билет 22

1. Понятие математического ожидания (статистического среднего) случайной величины. Среднее суммы случайных величин.

2. Неравенство Чебышева.

Задача:

Два стрелка независимо друг от друга совершают по одному выстрелу в общую мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0.8, для второго - 0.4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Какова вероятность, что в мишень попал первый стрелок?

Билет 23

1. Плотность вероятностей и статистические средние функций случайных величин.

2. Понятие гауссовой совокупности случайных величин.

Задача:

Имеются два одинаковых ящика с шарами: в одном 2 белых и 1 черный шар, в другом - 1 белый и 4 черных шара. Наудачу выбирают один из ящиков и вынимают из него шар. Какова вероятность, что этот шар белый?

Билет 24

1. Моменты и центральные моменты, дисперсия.

2. Свойства характеристических функций. Свойство положительной определенности.

Задача:

Студент пришел на экзамен, зная лишь 20 из 25 вопросов. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Используя понятие условной вероятности, найти вероятность того, что студент знает все заданные вопросы.

Билет 25

1. Понятие характеристической функции. Вычисление моментов с помощью характеристической функции.

2. Исчисление вероятностей по схеме шансов.

Задача:

Вася и Петя договорились встретиться в библиотеке между 12 и 13 часами дня. Полагая, что они приходят независимо и равновозможно в течение этого часа, найти интегральную функцию распределения времени ожидания Васи Петей.

Билет 26

1. Относительная частота появления случайного события. Статистическое определение вероятности.

2. Условные интегральная функция распределения и плотность вероятностей.

Задача:

Студент пришел на экзамен, зная лишь 20 из 25 вопросов. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Используя понятие условной вероятности, найти вероятность того, что студент знает все заданные вопросы.

Билет 27

1. Геометрическое исчисление вероятностей. Задача Бюффона.

2. Закон Больших Чисел в форме Чебышева.

Задача:

Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и потому набирает ее наугад. Какова вероятность, что ему придется звонить не более, чем в три места?